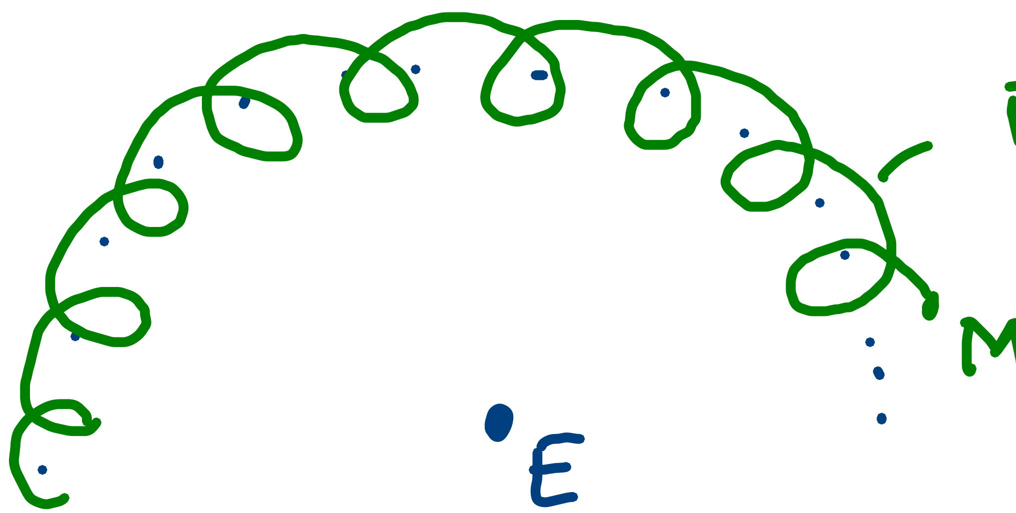
Vorlesung (5), 30.11.2021

§2. Die Keplerschen Gesetze

(2.1) Motivation: Planetenbewegung

(i) bei den Griechen: (Epi-)Zykel um die Erde

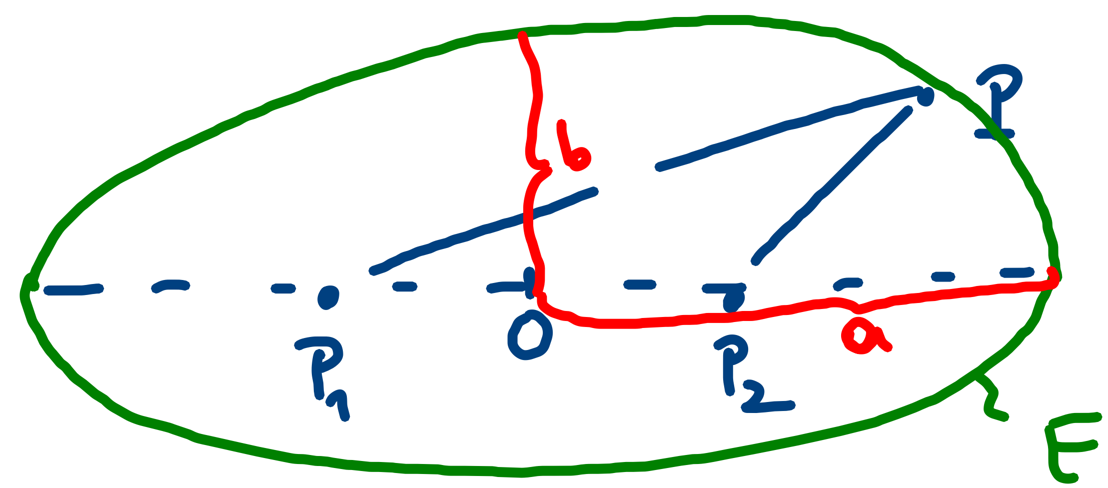


Epizykel: Mittelpunkt läuft auf Kreis um die Erde

(ii) Kopernikus: Kreisbahnen um die Sonne

(iii) J. Kepler (auf der Grundlage genauer Beobachtungen von T. Brahe):

1. Keplersches Gesetz: Jeder der (fünf) Planeten bewegt sich in einer Ebene. Und zwar auf einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.



$(\ell > 0)$

$$E = \{ P \in \mathbb{E}^2 : \| P - P_1 \| + \| P - P_2 \| = 2\ell \}$$

$$\varepsilon := \| P_2 - P_1 \| / 2\ell \qquad \text{(Exzentrizität)}$$

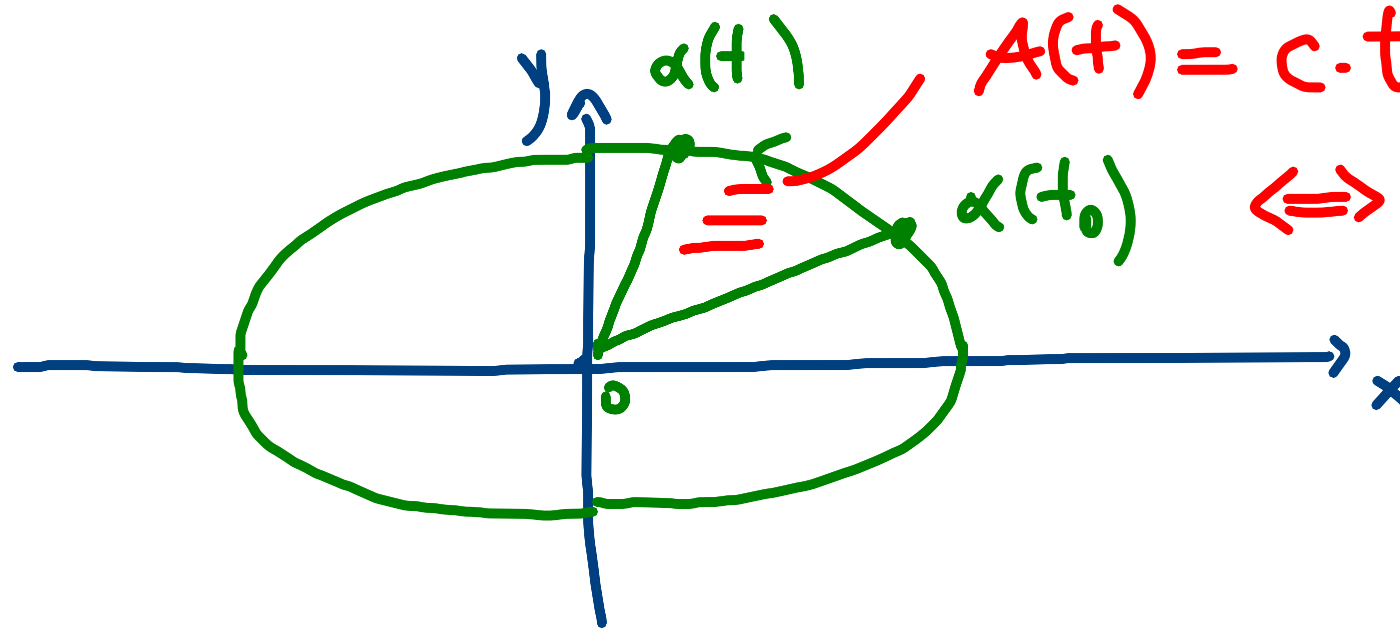
Mittelpunktsgleichung:

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

(a Länge der großen Hauptachse, b = Länge der kleinen Hauptachse; $a = \ell$, $b = \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \ell$.

Bis hier: Blanke Geometrie

2. Keplersche Gesetz: Für alle (fünf) Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter) überstreicht die Strecke $\overline{OP}$ in gleichen Zeitintervallen die gleiche Fläche: „die Flächengeschwindigkeit ist konstant".



$$A(t) = c \cdot t \iff \dot{A} = \text{const.}$$

<u>3. Keplersche Gesetz</u>: Für alle Planeten gilt für die Periodendauer $T > 0$ und der großen Halbachse $a > 0$:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

(Für alle 5 Planeten die gleiche Konstante)

(iv) <u>Newton</u>: Die (fünf) Bahnen (und alle möglichen anderen) sind die Lösungskurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m_t \ddot{x} = m_s\, G(x), \quad \text{(2. Newt. Gesetz)}$$

wo m_t die träge Masse des Planeten, m_s die schwere Masse des Planeten und $G: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Gravitationsfeld ist, welches die Sonne, angenommen im Ursprung $x=0$ verursacht.

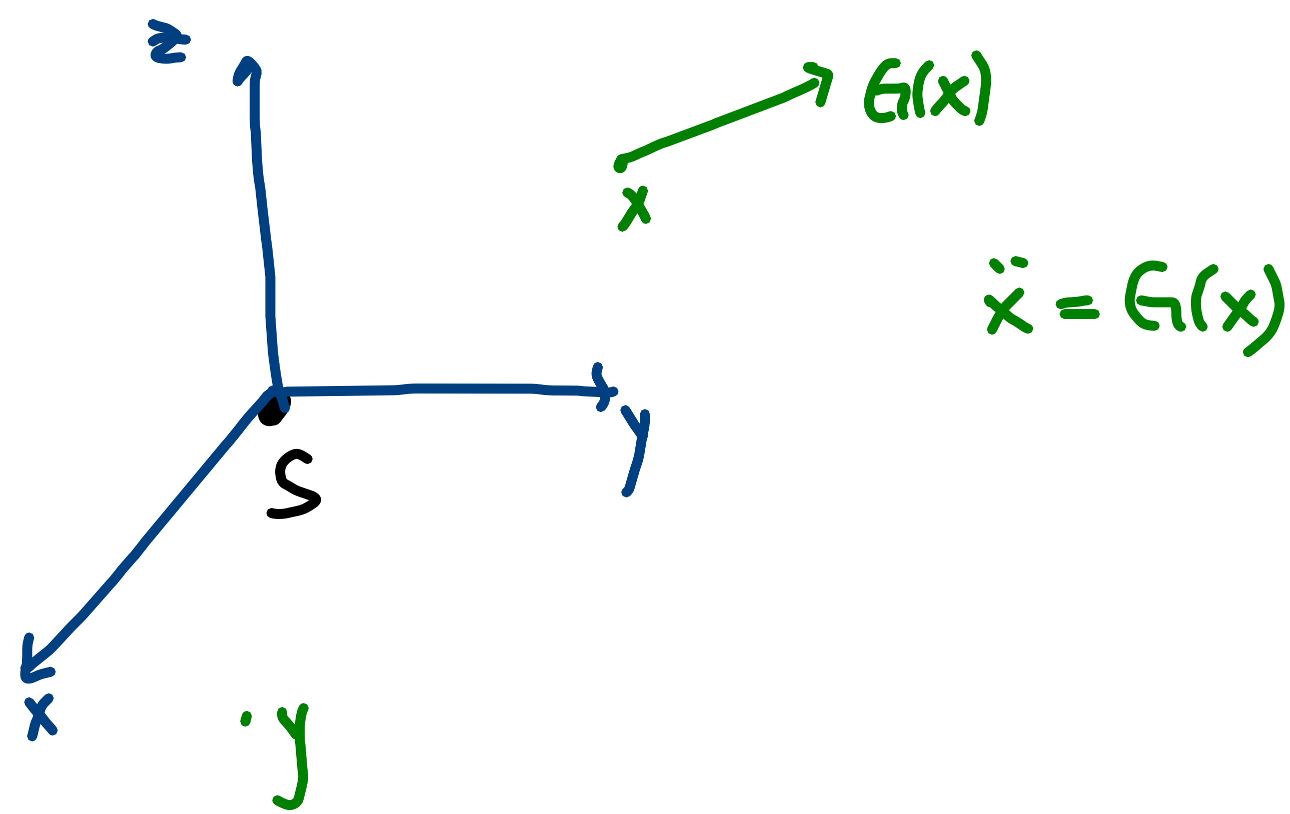
(v) Mit $\frac{m_t}{m_s} = \lambda > 0$ ist konstant (für alle Materie) und nach Zeitreskalierung $t = \sqrt{\lambda}\cdot\tau$ wird das zu:

$$\ddot{x} = G(x) \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

(vi) Newtons weitere große Leistung: Bestimmung des

Gravitationsfeldes G allein aus Symmetrieannahmen und Keplers Gesetze (Gravitationsgesetz).

[Also hier mal umgekehrt: Wissen über Bahnen (φ^t) führt zur Kenntnis des Vektorfeldes G.]



(2.2) Das Gravitationsgesetz

Gesucht: Drei Funktionen $G_1, G_2, G_3 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, in Abhängigkeit von 3 Variablen x_1, x_2, x_3, $G = (G_1, G_2, G_3)$.

Eigenschaften des Raumes: (i) Homogenität des Raumes
(ii) Isotropie des Raumes

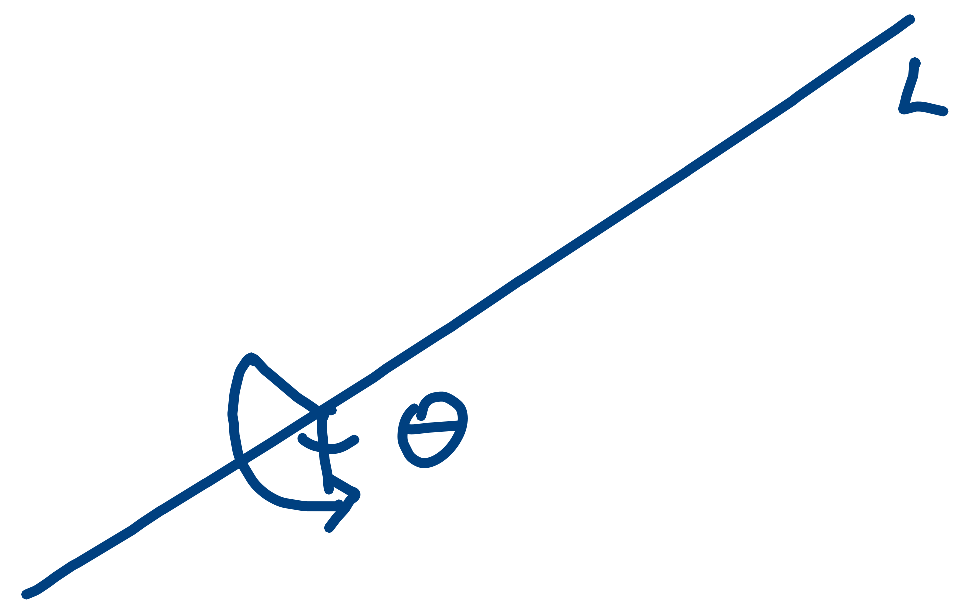
Betrachte dazu

$$SO(3) = \{ A \in Gl_3 \mathbb{R} : A^T \cdot A = \mathbb{1}, \det A = +1 \}$$

die spezielle orthogonale Gruppe. $SO(3)$ erhält Abstände im Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle -,- \rangle)$ (und Orientierung), also

$$\| Ax - Ay \| = \| x - y \|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{und } \det A > 0).$$

Jedes $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \longmapsto Ax$, ist linear und ist Drehung um eine Achse $L \subseteq \mathbb{R}^3$ um einen Winkel $\Theta \in (0, 2\pi)$ (oder $A = \mathbb{1}$).



Daraus:

(α) $SO(3)$ operiert transitiv auf

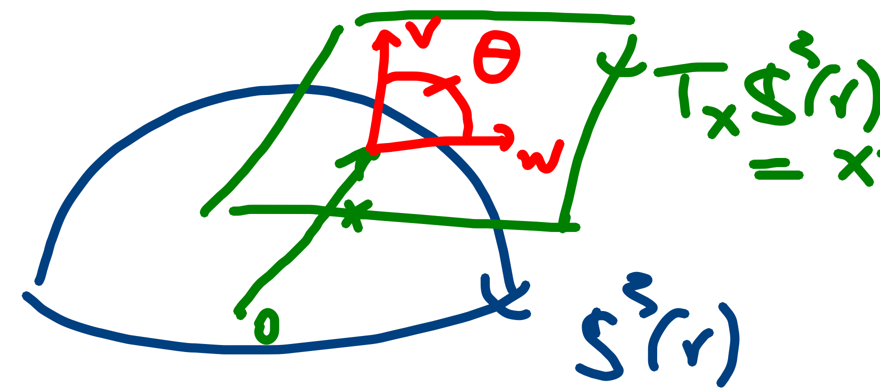
$$S^3(r) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \| x \| = r \} \quad (r > 0),$$

d.h.: $\forall x, y \in S^3(r)\ \exists A \in SO(3): \ Ax = y$ (Homogenität)

(β) Ist $x \in S^3(r)$ und $v, w \in T_x S^3(r) = x^\perp$ mit $\|v\| = \|w\|$, so existiert $A \in SO(3)$ mit

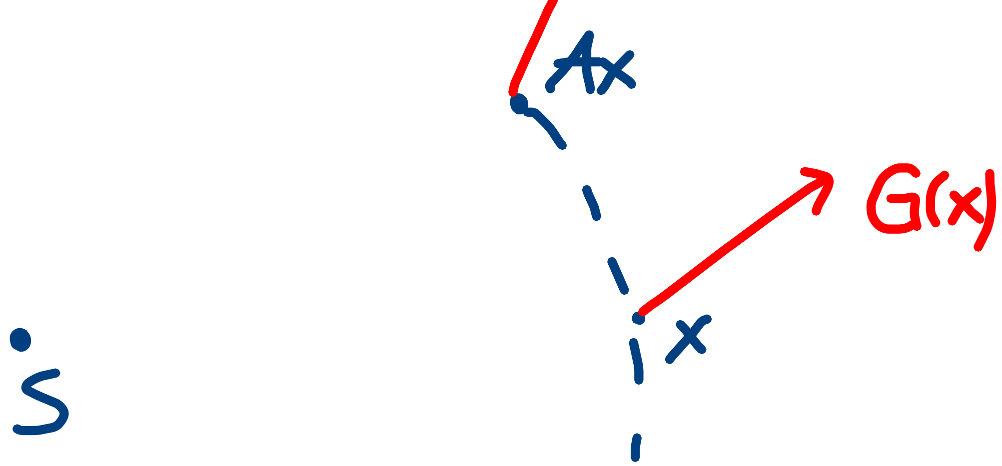
$$Ax = x, \quad Av = w$$

(Isotopie)



Naheliegende Symmetrieannahme an das Feld G: G muss invariant unter $SO(3)$ sein, d.h.:

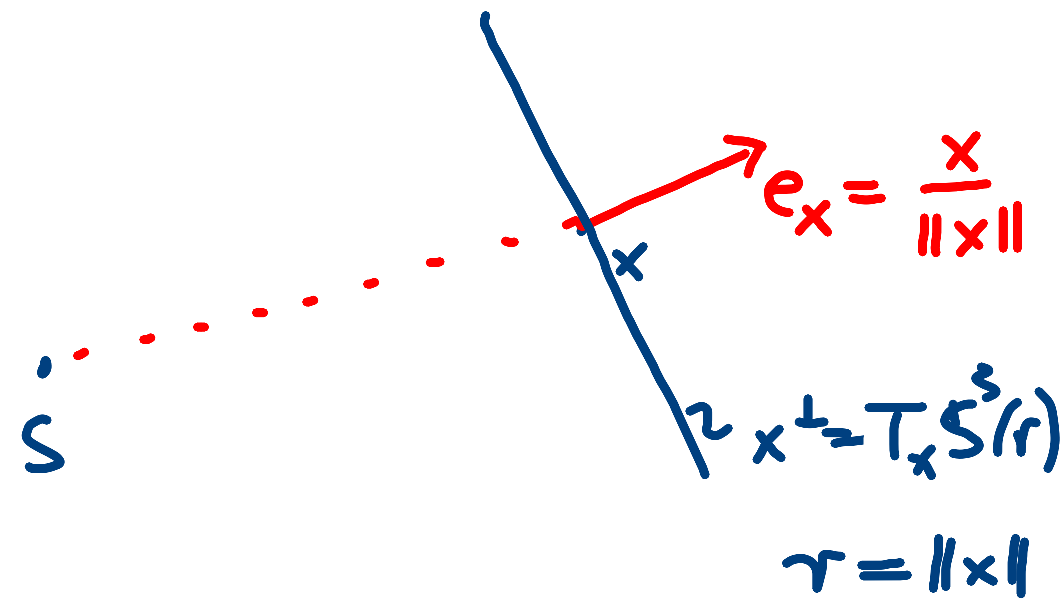
$$\forall A \in SO(3),\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}: \quad G(Ax) = A \cdot G(x)$$



1. Konsequenz. G muss ein Zentralfeld sein, d.h.:

$$G(x) = \rho(x) \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{=: e_x}$$

mit einem $\rho : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.



Zerlegt man nämlich $G(x)$ in seine Normal- und Tangential-komponente,

$$G(x) = \overbrace{G^{norm}(x)}^{= \rho e_x} + G^{tan}(x),$$

so muss wegen (β) $G^{tan}(x) = 0$ sein.

2. Konsequenz. G muss sogar rotationssymmetrisch sein, d.h.:

es gibt ein $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\rho(x) = \psi(\|x\|)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "N"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}_+ \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Denn wegen (α) ist für jedes $y \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ mit $\|y\| = \|x\|$: $\exists A \in SO(3): Ax = y$ und

$$G(y) = A \cdot G(x)$$

$$\iff \rho(y)\frac{y}{\|y\|} = A\cdot\left(\rho(x)\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$= \frac{\rho(x)}{\|x\|}\cdot \underbrace{Ax}_{=y} = \rho(x)\cdot\frac{y}{\|y\|}$$

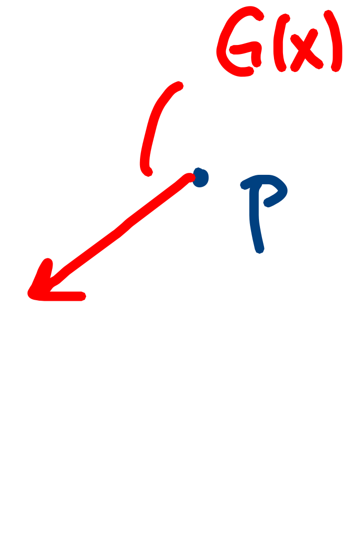
$$\iff \rho(y) = \rho(x)$$

Setze also etwa $\psi(r) := \rho\left(\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \rho(x) = \psi(\|x\|)$.

Insgesamt: Symmetrieannahmen reduzieren die Suche von 3 Funktionen in 3 Veränderlichen auf die Suche nach 1 Funktion in einer Veränderlichen:

$$G(x) = -\varphi(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|}$$

Tradition



Weitere natürliche Annahmen:

- $\varphi > 0$, da Grav.-Kraft anziehend
- φ monoton fallend, da die Kraft bei größerem Abstand nachlässt!

$\rightsquigarrow$ natürlicher Ansatz: $\varphi(r) = \frac{1}{r^k}$ (mit $k \in \mathbb{N}$) ($k=2$!)

(2.3) Erste Integrale

(i) Energie. Sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfkt. von $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, z.B.

$$\varphi(r) = \int_1^r \psi(s)\,ds.$$

Proposition. Dann ist $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = \varphi(\|x\|),$$

ist ein Potential für G, $\operatorname{grad}(V) = -G$.

Beweis. Für die Normfunktion $N : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$, $N(x) = \|x\|$ gilt:

$$D_i N(x) = \frac{1}{2\|x\|} 2x_i$$

also:

$$\operatorname{grad}(N)(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Nach der Kettenregel ist dann

$$V = \varphi \circ N(x)$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad}(V)(x) &= -\varphi'(\|x\|) \cdot \operatorname{grad}(N)(x) \\ &= -\psi(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|} = G(x). \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Kommentar. Also ist G konservativ, damit $\ddot{x} = G(x)$ Hamiltonsch mit Hamilton-Fkt. $H : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \varphi(\|x\|),$$

und damit H ein 1. Integral.

(ii) Drehimpuls

Definition. Sei $P = D \times \mathbb{R}^3$ der Phasenraum eines Newtonsystems $\ddot{x} = G(x)$ auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann nennt man $L : P \to \mathbb{R}^3$

$$L(x,y) = x \times y \qquad \text{(Kreuzprodukt)}$$

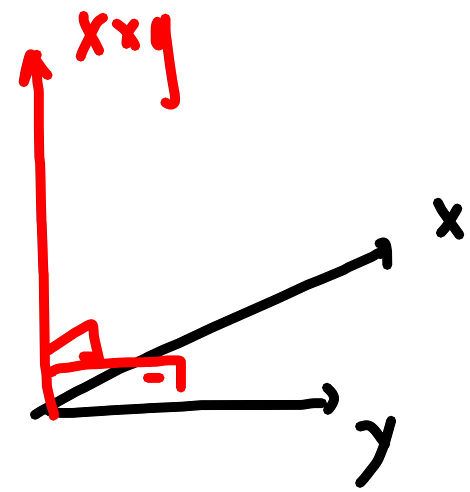
den Drehimpuls des Systems.

Erinnere: Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

und es gilt:

- $x \times y \perp x$, $x \times y \perp y$
- $x \times y = 0 \iff (x, y)$ l.a.
- $(x,y) \mapsto x \times y$ ist bilinear



Proposition. Ist $G: D \to \mathbb{R}^3$ ein Zentralfeld auf $D \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so ist G ein 1. Integral für $\ddot{x} = G(x)$.

Beweis. Zentralfeld zu sein bedeutet:

$$G(x) = \rho(x) \frac{x}{\|x\|}$$

Ist $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ Lösung von $\ddot{x} = G(x)$, so ist

$$\frac{d}{dt} L(x(t), \dot{x}(t)) = (x \times \dot{x})^{\dot{}}(t) = \underbrace{\dot{x} \times \dot{x}}_{=0} + x \times \ddot{x}$$

$$= x \times \left(\rho(x) \frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\rho(x)}{\|x\|} \underbrace{(x \times x)}_{=0} = 0 .$$

$\square$

<u>Kommentar</u>. Damit haben wir insgesamt mit $H, L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vier 1. Integrale. Sind diese unabhängig (d.h. $(DH, DL_1, DL_2, DL_3)(x)$ ist l.u.), so erwarten wir also, dass die Lös.-Kurven auf 2-dimensionalen Flächen $M \subseteq P = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3$ stattfinden.

E

$\dot{S}$